LYCÉE OUED-ELLIL

SÉRIE D'EXERCICES – MATHÉMATIQUES

CLASSE : 4[IÉME] ANNÉE SECONDAIRE : SCIENCES / MATHS

THÈMES: SUITES RÉELLES

PROF : BELLASSOUED MOHAMED /ANNÉE SCOLAIRE 2018-2019

EXERCICE 1:

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

1-a- Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 1$

b- Montrer que la suite u est décroissante

c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq 2$

d- Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite ℓ

2-a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

b- En déduire par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c-Retrouver alors la limite ℓ de la suite u

3- On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes

4- Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots\cdots u_{n-1} + u_n$.

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $n+1 \leq S_n \leq n+3-\dfrac{1}{2^n}$.

b-Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$

5- Pour tout entier naturel n, on pose : $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots\cdots v_{n-1} + v_n$.

a-Vérifier que $u_n + v_n = 2u_{n+1}$

b- En déduire que $T_n = S_n + 2u_{n+1} - 4$

EXERCICE 2:

On considère les suites (U_n) et (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n^2+V_n^é}{U_n+V_n} \end{cases}$

1-a-Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \prec U_n \leq V_n$

b-En déduire que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante

2-Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes .

On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

3- On considère les suites (a_n) et (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = U_n + V_n$ et $b_n = \dfrac{U_n}{V_n}$

a-Montrer que la suite (a_n) est constante

b-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{2b_n}{1+b_n^2}$

c-En déduire que la suite (b_n) est convergente et converge vers 1

4- Montrer que $\ell = \ell'$ puis déduire la valeur de cette limite

EXERCICE 3:

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$.

1- On considère la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$

a-Tracer la courbe représentative de f , ainsi que la droite $\Delta : y = x$

b-Placer soigneusement sur le graphique les termes U_1 ; U_2 et U_3

c -Quelle conjecture peut-on former sur la monotonie et la convergence de la suite (U_n)

2- a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le U_n \prec 2$

b- Montrer que la suite (U_n) est croissante

c- En déduire que la suite (U_n) est convergente, déterminer sa limite .

3- On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_n \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right] \\ U_n = 2\cos V_n \end{cases}$

a- Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

b-En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)$

c-Retrouver alors la limite de la suite (U_n)

d-Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

EXERCICE 4:

On considère les suite (U_n) et (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + V_n}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 7 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$

1-On considère la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = V_n - U_n$

a- Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{12}$

b-Exprimer (W_n) en fonction de n . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \le V_n$

2- Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes .Que peut-on déduire ?

3-On considère la suite (T_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $T_n = 3U_n + 4V_n$

a-Montrer que la suite (T_n) est constante et donner sa valeur .

b-On déduire la limite commune des deux suites (U_n) et (V_n)

Exercice 5:

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{\sqrt{1+3U_n^2}}{2}$.

1- On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2}$

On a tracé sur la feuille annexe la courbe représentative de f , ainsi que la droite $\Delta : y = x$

a- Placer soigneusement sur le graphique sans les calculer les termes U_1 ; U_2 et U_3

b- Quelle conjecture peut-on former sur la monotonie et la convergence de la suite (U_n)

2- a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b- Montrer que la suite (U_n) est croissante

3- a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}$

b- En déduire que la suite (U_n) est convergente, déterminer sa limite .

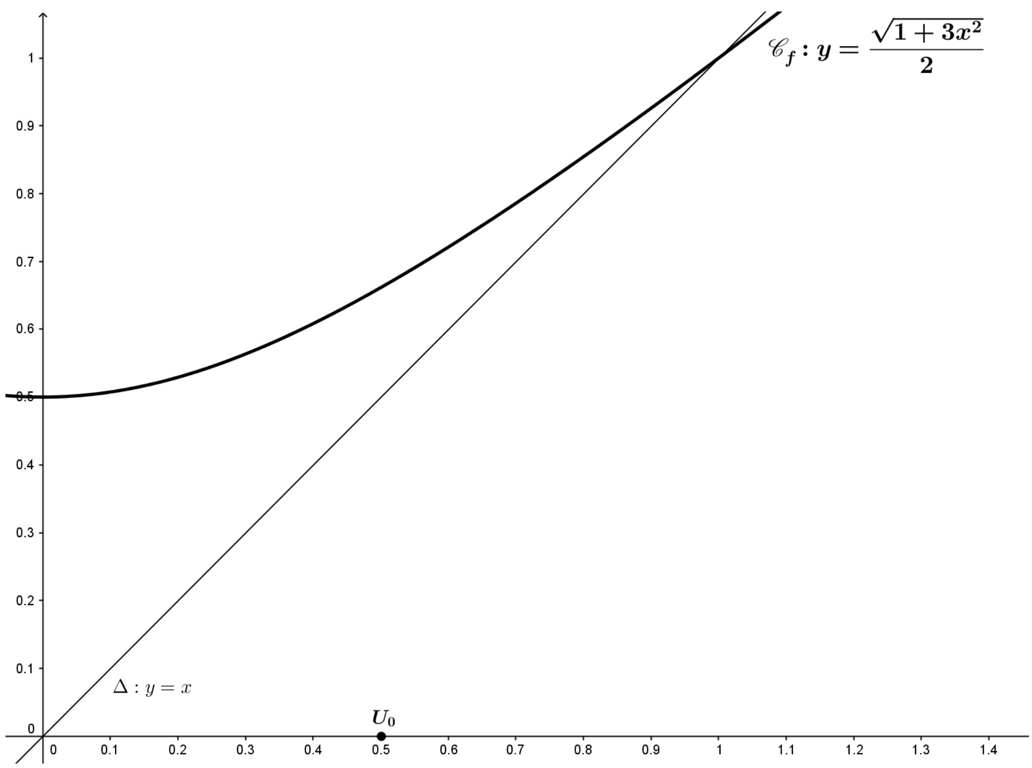
4- On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{V_n + U_{n+1}}{1+V_n U_{n+1}} \end{cases}$

a-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \prec V_n \leq 1$

b-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - V_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1-V_n)$

c-En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d-Déterminer alors la limite de la suite (V_n)



Exercice 6 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $U_0 = 1$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \dfrac{1}{1+2U_n}$

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$ et C_f sa courbe représentative

1-a- Placer sur l'axe des abscisses les termes U_1 ; U_2 et U_3

b-quelle conjecture peut-on former sur la monotonie et la convergence de la suite (U_n)

2-a-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \succ 0$

b-Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que si $U_k \succ \dfrac{1}{2}$ alors $U_{k+1} \prec \dfrac{1}{2}$ et $U_{k+2} \succ \dfrac{1}{2}$

c-Exprimer U_{n+2} en fonction de U_n

3-On considère les suites (V_n) et (W_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a-Montrer que (V_n) est une suite décroissante et minorée par $\dfrac{1}{2}$

b- Montrer que (W_n) est une suite croissante et majorée par $\dfrac{1}{2}$

c- En déduire que (U_n) est une suite convergente et calculer sa limite.